

Pladers beregning ved Differensligninger

P.M.Frandsen

Tidsskrifter

BSM 2-4 Bygningsstatiske Meddelelser

1930

PLADERS BEREGNING VED DIFFERENS- LIGNINGER¹⁾.

Af P. M. FRANSEN.

Den fundamentale Differentialligning til Behandling af plane homogene Plader med Belastning vinkelret paa Pladens Plan er som bekendt *Lagrange's* Ligning. Ved Benyttelse af et retvinklet Koordinatsystem *XY* i Pladens Midterplan lyder den:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (1)$$

Heri betegner *u* og *p* henholdsvis Nedbøjningsflade og Belastningsflade, begge udtrykt som Funktioner af *x* og *y*; $D = \frac{EI}{1 - \nu^2}$ angiver Pladens Stivhedsforhold, idet *E* er Materialets Elasticitetskoefficient, *I* Tværsnittets Inertimoment pr. Længdeenhed af Snittet og ν *Poisson's* Forhold.

Ved simpel Omskrivning omformes (1) til

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{p}{D}.$$

Sættes heri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U}{D}, \quad (2)$$

faas

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p. \quad (3)$$

Ligningerne (2) og (3), som træder i Stedet for (1), kaldes *Poisson's* Ligninger.

Størrelsen *U* benævnes Skalar-Momentet²⁾.

1) Forelæst i Dansk Selskab for Bygningsstatik ved Mødet d. 28. Oktober 1930.

2) Udtrykt ved Pladens Bøjningsmomenter M_{xx} og M_{yy} pr. Længdeenhed af to paa hinanden vinkelrette Snit bliver $U = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1 + \nu}$. Herom samt om Pladens Snitkræfter iøvrigt henvises til Bygningsstatiske Meddelelser 1929, S. 45-64.

Baade U og u er herefter at opfatte som Skalar-Potentialer, hvis Gradienter, Potentialfladernes Tangenthældninger henholdsvis Forskydningskræfterne T og Nedbøjningsfladens Tangentvinkler t er Vektorer med Aksekomponenter i det angivne Koordinatsystem:

$$T_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{og} \quad t_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

For en vilkaarlig Retning n haves:

$$T_n = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(yn) \quad \text{og} \quad t_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(yn). \quad (4a)$$

Randbetingelserne for Plader, der er simpelt understøttede paa plane polygonale Randkurver, bliver

$$U = 0 \quad \text{og} \quad u = 0. \quad (5)$$

Ved saadanne Plader er Skalar-Momenterne U statisk bestemte i samme Forstand som Momenterne i simpelt understøttede Bjælker¹⁾.

Et anskueligt Billede af U - og u -Fladerne for statisk bestemte Plader faas ved Nedbøjningsfladerne for en over Pladens Randkurve med konstant Spænding udspændt elastisk Hinde (Membran), naar den belastes med henholdsvis p og $\frac{U}{D}$ pr. Arealenhed. Disse Nedbøjningsflader kaldes Strækflader.

Ligningerne (2) og (3) er analoge med de tilsvarende Differentialligninger ved Bjælker, og Strækfladen er for Plader det billedlige Udtryk, som svarer til Tovkurven for Bjælkens Vedkommende.

Ved Benyttelse af Green'ske Funktioner kan Pladers Behandling bringes i bedst mulig Overensstemmelse med den for Ingeniørpraksis mest egnede Behandlingsmaade for Bjælker.

Ligesom U er Skalar-Moment for Belastningen p , saaledes kan ogsaa u betragtes som Skalar-Moment for Belastningen $\frac{U}{D}$.

1) For cylindrisk deformerede Plader med Y -Aksen som Frembringerretning er $M_{yy} = \nu M_{xx}$ og altsaa

$$U = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1 + \nu} = M_{xx}.$$

Pladen fungerer i dette Tilfælde som en Bjælke. Ved indspændte Plader under understøttede langs rette Linier er Indspændingsmomenterne ligeledes lig Skalar-Momenterne.

Green'ske Funktioner for Plader.

Som vist i Afhandlingen Pladers Beregning ved Differensligninger¹⁾, lyder *Green's* Ligning for Plader:

$$\int_f (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) df = \int_s \left(U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (6)$$

hvor venstre Side er et Fladeintegral, som udstrækkes over alle Areal-elementer af Pladens Midterflade f , medens højre Side er et Linieintegral, som udstrækkes over alle Elementer af Pladens Randkurve s (udvendig Normal n). Tegnet Δ er *Laplace's* Differentialoperater. Med Anvendelse af denne skrives Ligningerne (3) og (2):

$$\Delta U = -p \quad \text{og} \quad \Delta u = -\frac{U}{D}. \quad (7)$$

Af de to i *Green's* Ligning indgaaende Funktioner U og U_1 kræves, at de skal være entydige og kontinuerte indenfor Pladen, medens de ellers kan være uafhængige af hinanden.

Green's Funktioner kaldes visse partikulære Integraler, som tilfredsstillen en *Poisson'sk* (*Laplace'sk*) Ligning

$\Delta U_1 = -k$ ($k=0$ undtagen for visse Punkter eller Linier) og er Nul langs Pladens Randkurve s (udvendig Normal n).

En *Green's* Funktion afbildes altsaa (ligesom U og u for statisk bestemte Plader) ved Strækfladen for en tænkt Belastning k . Ved Hjælp af denne Betragtning indses umiddelbart, at man som Understøtning for Strækfladen ikke er bundet til udelukkende at benytte Pladens Randkurve, men kan til Optagelse af Strækfladens lodrette Lejetryk bruge en vilkaarlig anden lukket Kurve s (ydre Normal n), Reaktionskurven, beliggende i XY -Planen og indenfor Randkurven, men omsluttende den tænkte Belastning, medens Strækfladens Horizontaltræk stadig optages af Randkurven.

Fordelen ved Anvendelsen af saadanne Reaktionskurver er, at de mulige *Green'ske* Funktioner derved bliver uafhængige af Pladens virkelige Randkurve, idet de kun afhænger af Reaktionskurven, som kan vælges vilkaarligt og saa bekvemt som muligt.

Ved Indførelse af en passende valgt *Green'sk* Funktion i *Green's* Ligning (6) tilligemed en af Ligningerne (7) faas for U (eller u) enten explicite

¹⁾ Bygningsstatistiske Meddelelser 1929, S. 45-64

Udtryk (med U_1 lig Funktionen G for Punktbelastning) eller Differensligninger (med U_1 lig Funktioner for Liniebelastning), saaledes som tidligere vist i Afhandlingen Pladers Beregning ved Differensligninger¹⁾.

I det følgende behandles kun rektangulære Plader, ved hvilke Reaktionskurverne vælges som Rektangler og den tænkte Belastning som Liniebelastninger efter Armene i et Kors, som deler Omraadet indenfor hvert Reaktionsrektangel i fire Ruder. Reaktionsrektanglernes Sider og Belastningskorsenes Arme lægges parallelt med Pladens to Kantretninger ligesom Koordinataksene i de anvendte Koordinatsystemer.

Differensligninger for Skalarmomenter.

Denne Opgave er tidligere behandlet i den ovenfor citerede Afhandling, hvorfor her kun af Hensyn til det følgende skal angives Hovedresultaterne.

I Fig. 1 er vist et vilkaarligt Reaktionsrektangel $(x-1), (x+1), (y-1), (y+1)$

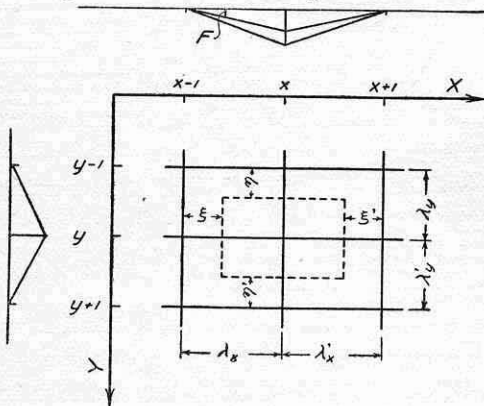


Fig. 1.

med Liniebelastning langs Belastningskorsset xy . Som Funktion U_1 i (6) vælges en Green's Funktion F , hvis Strækflade bestaar af fire hyperbolske Paraboloïder med Ordinator Nul langs Reaktionsrektanglernes Sider og med parvis fælles Ordinator (varierende efter rette Linier) langs Belastningskorsset. Med Betegnelserne i Fig. 1 bliver Ligningerne for F i de fire Ruder (Begyndelsepunktet for det sekundære Koordinatsystem i hver Rude ligger i Reaktionsrektanglernes tilsvarende Hjørner):

$$\begin{array}{c|c} F = F_{xy} \frac{\xi \eta}{\lambda_x \lambda_y} & F = F_{xy} \frac{\xi' \eta}{\lambda'_x \lambda_y} \\ \hline F = F_{xy} \frac{\xi \eta'}{\lambda_x \lambda'_y} & F = F_{xy} \frac{\xi' \eta'}{\lambda'_x \lambda'_y} \end{array},$$

idet F_{xy} er Funktionsværdien i Korssets Midte. -

At $\Delta F = 0$ i alle Punkter af Ruderne, ses umiddelbart og ligeledes, at $F = 0$ langs Reaktionsrektanglernes Sider.

Af Ligning (6) følger da:

¹⁾ l. c.

$$-P_{xy} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left(\frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta d\eta \\ & + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left(\frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta' d\eta' \\ & + \frac{1}{\lambda_x} \int_0^{\lambda_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi \\ & + \frac{1}{\lambda'_x} \int_0^{\lambda'_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

hvor

$$P_{xy} = \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} p \frac{\xi \eta}{\lambda_x \lambda_y} d\xi d\eta + \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda'_y} p \frac{\xi \eta'}{\lambda_x \lambda'_y} d\xi d\eta' \\ & + \int_0^{\lambda'_x} \int_0^{\lambda_y} p \frac{\xi' \eta}{\lambda'_x \lambda_y} d\xi' d\eta + \int_0^{\lambda'_x} \int_0^{\lambda'_y} p \frac{\xi' \eta'}{\lambda'_x \lambda'_y} d\xi' d\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Af (9) ses, at P_{xy} er ensbetydende med det Knudepunktstryk, som Pladens Belastning afgiver i Punktet (x, y) , naar den i hver af de fire Ruder tænkes at virke indirekte paa Pladen gennem et simpelt understøttet enkelt Ristværk, baaret af Belastningskorsets fire Arme (regnede simpelt understøttede) og Reaktionsrektanglets Sider.

De paa højre Side af Lighedstegnet i (8) indgaaende Værdier af U henhører udelukkende til Reaktionsrektanglets og Belastningskorsets Linier og ses umiddelbart at betyde Trykkene fra de paa nævnte Linier staaende $\frac{U}{\lambda}$ -Flader, fordelte paa Belastningskorsets Endepunkter og Midtpunkt efter Reglerne for indirekte Belastning som ved Bjælker, idet de sekundære Bjælker er simpelt understøttede med Spændvidder λ_x , λ'_x , λ_y og λ'_y .

Form af Differensligning antager Ligning (8), naar man ved Udregningen af de nævnte Tryk fra $\frac{U}{\lambda}$ -Fladerne i hvert Fag deler Systemliniens U -Flade i en nedre trapezformet Del, som er bestemt alene ved Værdierne af U i Systempunkterne, og en øvre Segmentflade, som afhænger af U -Fladens Forløb mellem Systempunkterne.

Ved simpelt understøttede (ikke altfor aflange) Plader, langs hvis Omkreds U -Fladerne har Ordinaterne Nul, kan man (med Tilnærmelse) faa explicite Udtryk for Skalarmomentet (U for Belastningen p eller u for Belastningen $\frac{U}{D}$) i et vilkaarligt Punkt ved at vælge Pladeranden som

Reaktionskurve og samtidig lægge Belastningskorset gennem det betragtede Punkt. Længs Belastningskorset maa herved U -Fladernes Hovedform skønnes, hvilket let sker ved Hjælp af Strækfladen, idet man nøjagtigt nok som Begrænsningskurver bruger 2' Grads-Parabler eller rette Linier efter Belastnings Art.

Specielt for cylindrisk deformerede Plader (Bjælker) med Y -Aksen som Frembringerretning faas af Ligning (8), idet U_{x-1} , U_x og U_{x+1} hver for sig er konstante for alle Værdier af η og $U_{y-1} = U_y = U_{y+1}$ for samme Værdi af ξ samt Belastningen p alene Funktion af x :

$$-P_{xy} = \frac{M_{x-1} - M_x}{\lambda_x} - \frac{M_x - M_{x+1}}{\lambda'_x}, \quad (8a)$$

hvilket er det fra Bjælkers Behandling bekendte Differensudtryk. Størrelserne P_{xy} , M_{x-1} , M_x og M_{x+1} refererer sig alle til Pladebredden 1.

Differensligninger for Tangenthældninger.

Potentialfladernes Tangenthældninger $T_n = \frac{\partial U}{\partial n}$ og $t_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ er som angivet ovenfor Vektorer, der hver bestemmes ved to Aksekomponenter, henholdsvis $(T_x = \frac{\partial U}{\partial x}, T_y = \frac{\partial U}{\partial y})$ og $(t_x = \frac{\partial u}{\partial x}, t_y = \frac{\partial u}{\partial y})$. Hver Aksekomponent maa bestemmes for sig.

I Fig. 2 er vist et vilkaarligt Reaktionsrektangel $(x-1)$, $(x+1)$, $(y-1)$, $(y+1)$ med Liniebelastning langs Belastningskorset xy .

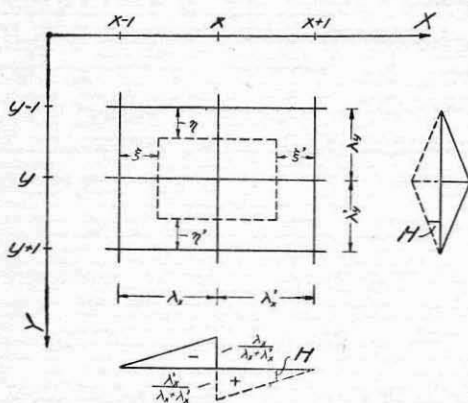


Fig. 2.

Til Bestemmelse af $T_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ langs

Snittet x benyttes Green's Ligning (6), idet der for U_1 vælges en Green's Funktion H , hvis Strækflade bestaar af fire hyperbolske Paraboloider med Ordinatorer Nul langs Reaktionsrektanglets Sider. Kun langs y har disse Paraboloider parvis fælles Ordinator, hvorimod de langs det betragtede Snit x har Ordinatorer med modsat Fortegn

og med parallelle Tangenter i Retningen vinkelret paa Snit x .

Med Betegnelserne i Fig. 2 faas følgende Ligninger for H i de fire Ruder, idet Begyndelsespunktet for det sekundære Koordinatsystem i hver Rude ligger i Reaktionsrektanglets tilsvarende Hjørne.

$$\begin{array}{|l} H = -\frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \\ H = -\frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} H = +\frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \\ H = +\frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \end{array} \right. \quad (9)$$

At $\Delta H = 0$ i alle Punkter af Ruderne, ses heraf umiddelbart og ligeledes, at $H = 0$ langs Reaktionsrektanglets Sider.

Af Ligning (6) følger da:

$$\int_f U \Delta H df - \int_f H \Delta U df = \int_s U \frac{\partial H}{\partial n} ds - \int_s H \frac{\partial U}{\partial n} ds$$

eller, idet $\Delta U = -p$ og $\Delta H = 0$:

$$\Sigma \int_f H p df = \Sigma \int_s U \frac{\partial H}{\partial n} ds - \Sigma \int_s H \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (10)$$

Fladeintegralet paa venstre Side udstrækkes over Omraaderne indenfor Reaktionsrektanglets fire Ruder. Linieintegralerne paa højre Side udstrækkes over Reaktionsrektanglets og Belastningskorsets Linier. Ved Summations-tegnene angives, at Integralerne ved Udregningen maa deles.

Ved nærmere Udregning faas:

$$\begin{aligned} \Sigma \int_f H p df = & \int_0^{\lambda_y} U_{x-1} \left(+ \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) d\eta + \int_0^{\lambda_y} U_x \left(- \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) d\eta \\ & + \int_0^{\lambda_y} U_x \left(+ \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) d\eta + \int_0^{\lambda_y} U_{x+1} \left(- \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) d\eta \\ & + \int_0^{\lambda'_y} U_{x-1} \left(+ \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) d\eta' + \int_0^{\lambda'_y} U_x \left(- \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) d\eta' \\ & + \int_0^{\lambda'_y} U_x \left(+ \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) d\eta' + \int_0^{\lambda'_y} U_{x+1} \left(- \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) d\eta' \\ & - \int_0^{\lambda_y} \left(- \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_x d\eta - \int_0^{\lambda_y} \left(+ \frac{\lambda'_x}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta}{\lambda_y} \right) \left(- \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x d\eta \\ & - \int_0^{\lambda'_y} \left(- \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_x d\eta' - \int_0^{\lambda'_y} \left(+ \frac{\lambda'_x}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{\eta'}{\lambda'_y} \right) \left(- \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x d\eta' \\ & + \int_0^{\lambda_x} U_{y-1} \left(+ \frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi + \int_0^{\lambda_x} U_y \left(- \frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi \\ & + \int_0^{\lambda_x} U_y \left(- \frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi + \int_0^{\lambda_x} U_{y+1} \left(+ \frac{\xi}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi \\ & + \int_0^{\lambda'_x} U_{y-1} \left(- \frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi' + \int_0^{\lambda'_x} U_y \left(+ \frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi' \\ & + \int_0^{\lambda'_x} U_y \left(+ \frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi' + \int_0^{\lambda'_x} U_{y+1} \left(- \frac{\xi'}{\lambda_x + \lambda'_x} \cdot \frac{1}{\lambda'_y} \right) d\xi', \end{aligned}$$

hvilket Udtryk ved Indførelse af Betegnelsen $T_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_x$ for Tangenthældningen i x -Aksens Retning langs Snittet x og Omordning af Leddene endelig antager Formen:

$$T_{x,0} = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left(T_x + \frac{U_{x-1} - U_{x+1}}{\lambda_x + \lambda'_x} \right) \eta d\eta + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left(T_x + \frac{U_{x-1} - U_{x+1}}{\lambda_x + \lambda'_x} \right) \eta' d\eta' \\ & + \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \left[\int_0^{\lambda_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi - \int_0^{\lambda'_x} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

idet

$$T_{x,0} = \Sigma \int_f H p d f. \quad (12)$$

De i Integralerne i Ligning (11) indgaaende T_x og $\frac{U}{\lambda}$ -Flader henhører udelukkende til Reaktionsrektanglets og Belastningskorsets Linier og betyder ligesom Integralerne i (8) disse Fladers Tryk paa Belastningskorsets Midtpunkt og Endepunkter, fordelte efter Reglerne for indirekte Belastning som ved Bjælker.

Form af Differensligning antager Ligning (11), naar man ved Udregning af disse Tryk deler Fladerne i hvert Fag i en nedre trapezformet Del, som er bestemt alene ved Systempunktsordinaterne, og et øvre Segmentareal.

For simpelt understøttede rektangulære Plader (Kantlængder a og b) med kun eet Systempunkt (x, y) og Reaktionsrektangler sammenfaldende med Omkredsen bliver $U_{x-1} = U_{x+1} = 0$ og $U_{y-1} = U_{y+1} = 0$, men derimod $U_y \geq 0$, hvorved Ligning (11) reduceres til:

$$T_{x,0} = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} T_x \eta d\eta + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} T_x \eta' d\eta' \\ & - \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \left[\int_0^{\lambda_x} U_y \left(\frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi - \int_0^{\lambda'_x} U_y \left(\frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \right] \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

eller

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} T_x \eta d\eta + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} T_x \eta' d\eta' = T_{x,0} \\ & + \frac{1}{\lambda_x + \lambda'_x} \left[\int_0^{\lambda_x} U_y \left(\frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi - \int_0^{\lambda'_x} U_y \left(\frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

Ved at skønne Variationen af T_x langs Snit x og af U_y langs Snit y faas heraf et explicit Udtryk for T_x i Punkt (x, y) .

Formel (11) indeholder de tilsvarende Formler for cylindrisk defor-
merede Plader (Bjælker) som specielt Tilfælde. Med Y -aksen som Frem-
bringerretning faas saaledes af Ligning (11), idet U_{x-1} , U_{x+1} og T_x hver
for sig er konstante for alle Værdier af η og $U_{y-1} = U_y = U_{y+1}$ for
samme Værdi af ξ :

$$T_{x,0} = T_x + \frac{M_{x-1} - M_{x+1}}{\lambda_x + \lambda'_x} \quad (11a)$$

eller

$$T_x = T_{x,0} - \frac{M_{x-1} - M_{x+1}}{\lambda_x + \lambda'_x},$$

hvilket Udtryk er velkendt fra Bjælketeorien. Størrelserne T og M refe-
rerer sig alle til Pladebredden 1.

Formel (11a) kan som bekendt udledes af (8a) paa følgende Maade:
Sættes i (8a) $\lambda_x = x$ og $\lambda'_x = x'$ og multipliceres paa begge Sider af Lig-
hedstegnet med $\frac{xx'}{x+x'}$, faas, idet $M_{x,0} = P_{xy} \frac{xx'}{x+x'}$:

$$-M_{x,0} = M_{x-1} \frac{x'}{x+x'} - M_x + M_{x+1} \frac{x}{x+x'},$$

og ved Differentiation heraf med Hensyn til x , idet $x+x'$ holdes kon-
stant:

$$T_{x,0} = T_x + \frac{M_{x-1} - M_{x+1}}{x+x'}$$

altsaa (11a).

Det er værd at lægge Mærke til, at (11) fremgaar paa lignende Maade
af (8). Sættes ogsaa her $\lambda_x = x$ og $\lambda'_x = x'$, faas ved Multiplikation af

(8) med $\frac{xx'}{x+x'}$, idet der sættes $U_{x,0} = P_{xy} \frac{xx'}{x+x'}$:

$$-U_{x,0} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left(U_{x-1} \frac{x'}{x+x'} - U_x + U_{x+1} \frac{x}{x+x'} \right) \eta d\eta \\ + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left(U_{x-1} \frac{x'}{x+x'} - U_x + U_{x+1} \frac{x}{x+x'} \right) \eta' d\eta' \\ + \frac{x'}{x+x'} \int_0^x \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi \\ + \frac{x}{x+x'} \int_0^{x'} \left(\frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \end{array} \right\}$$

Ved Differentiation af denne Ligning med Hensyn til x , idet Stykket $x + x'$ holdes konstant ligesom U ved dets Endepunkter, faas,

$$\text{da} \quad T_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_x \text{ og } \frac{x'}{x+x'} \left(\frac{U_{y-1}-U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y-U_{y+1}}{\lambda'_y}\right)_x \cdot x \\ - \frac{x}{x+x'} \left(\frac{U_{y-1}-U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y-U_{y+1}}{\lambda'_y}\right)_x \cdot x' = 0$$

$$\text{og} \quad T_{x,0} = \frac{\partial U_{x,0}}{\partial x} = \Sigma \int_f H \cdot pdf,$$

$$-T_{x,0} = \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left(-T_x - \frac{U_{x-1}-U_{x+1}}{x+x'}\right) \eta d\eta + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left(-T_x - \frac{U_{x-1}-U_{x+1}}{x+x'}\right) \eta' d\eta' \\ - \frac{1}{x+x'} \int_0^x \left(\frac{U_{y-1}-U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y-U_{y+1}}{\lambda'_y}\right) \xi d\xi \\ + \frac{1}{x+x'} \int_0^{x'} \left(\frac{U_{y-1}-U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y-U_{y+1}}{\lambda'_y}\right) \xi' d\xi',$$

hvilket Udtryk stemmer med Ligning (11).

Til Bestemmelse af Tangenthældningen $t_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ for Nedbøjningsfladen u faas Ligninger af samme Art som ovenstaaende, idet Belastningen p nu blot skal bestemmes for Skalar-Momentfladen $\frac{U}{D}$ som Belastningsflade.

Analoge Udtryk faas for Tangenthældningen $T_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ og $t_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ i Y -Aksens Retning.

Tangenthældninger ved Pladerandene.

Af særlig Interesse er Bestemmelsen af Tangenthældningerne ved Pladerandene for simpelt understøttede Plader og navnlig gælder dette Nedbøjningsfladens Tangenthældninger, hvilke sidste benyttes som Hjælpemiddel til Behandling af indspændte (eller kontinuerlige) Plader.

a) Plader med lodret Belastning.

For den i Fig. 3 viste simpelt understøttede rektangulære Plade med Kantlængder a og b skal bestemmes Tangenthældningen $T_{x,1} = \frac{\partial U}{\partial x}$ ved venstre Kant i et Punkt med Afstandene λ_y og λ'_y fra Kantens Endepunkter. Belastningen er p pr. Arealenhed.

Som almenlydig Regel haves, at $U = 0$ langs Pladeranden, og at Tangenthældningen $T = 0$ i Pladens Hjørner. Idet T_x antages at variere efter en Parabel langs den betragtede Kant, faas af (11) og (12) ved Deling af T_x -Fladen, som vist i Fig. 3, og idet $\lambda_x = 0$, $\lambda'_x = a$ samt $\lambda_x + \lambda'_x = a$, saaledes, at der kun bliver to Ruder:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} b T_{x,1} + B_x \frac{\eta_x}{\lambda_y} + B'_x \frac{\eta'_x}{\lambda'_y} &= \int_0^a \int_0^{\lambda_y} p \frac{\xi'}{a} \frac{\eta}{\lambda_y} d\xi' d\eta + \int_0^a \int_0^{\lambda'_y} p \frac{\xi'}{a} \frac{\eta'}{\lambda'_y} d\xi' d\eta' \\ &- A'_y \frac{\xi'_y}{a} \left(\frac{1}{\lambda_y} + \frac{1}{\lambda'_y} \right). \end{aligned} \right\} (14)$$

De to første Integraler paa højre Side betyder her Trykket i det betragtede Punkt fra Pladens Belastning, naar den tænkes at paavirke Pladen indirekte gennem et simpelt understøttet enkelt Ristværk i hver af Pladens to Ruder, baaret af Kanterne a og Skillelinien mellem Ruderne. Sidste Led paa højre Side betyder det Tryk, som Skilleliniens $\frac{U}{\lambda}$ -Flade

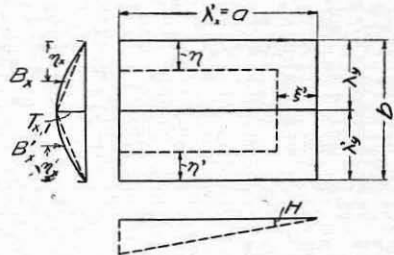


Fig. 3.

afleverer i det betragtede Punkt, idet A'_y er U -Fladens Areal og ξ'_y Tyngdepunktets Afstand fra Skilleliniens højre Ende. A'_y maa herved udtrykkes som Funktion af $T_{x,1}$.

Som Eksempel behandles efter (14) en kvadratisk Plade, ($a = b = l$), paavirket af en ensformig fordelt Belastning p .

For U -Fladens Tangenthældning $T_{x,1}$ i Midtpunktet af Siden $b (= l)$ faas, idet T_x antages at variere efter en 2' Grads Parabel:

$$\frac{1}{3} l T_{x,1} + \frac{1}{4} T_{x,1} \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{8} p l^2 + \frac{1}{8} p l^2 - A'_y \cdot \frac{\xi'_y}{l} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} l} + \frac{1}{\frac{1}{2} l} \right).$$

Skønnes U -Fladen langs Skillelinien som en 2. Grads Parabel, faas¹⁾

$$A'_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} T_{x,1} l \cdot l = \frac{1}{6} T_{x,1} l^2$$

samt

$$\xi'_y = \frac{1}{2} l,$$

hvorved Ligningen bliver:

¹⁾ For en Parabelbue med Pilhøjde f over Korden l faas for Tangenthældningen $T = \operatorname{tg} \alpha$ i Endepunktet af Korden:

$$\operatorname{tg} \alpha = T = \frac{2f}{\frac{1}{2} l},$$

hvoraf

$$f = \frac{1}{4} T l$$

og altsaa Arealet

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} T l \cdot l = \frac{1}{6} T l^2.$$

$$T_{x,1} l \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4} pl^2 - \frac{1}{6} T_{x,1} l^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l} + \frac{2}{l} \right)$$

$$T_{x,1} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{3} \right) l = \frac{1}{4} pl^2$$

$$T_{x,1} = \frac{1}{3} pl.$$

Ved nøjagtig Beregning efter Lévy's Formler faas

$$T_{x,1} = \frac{1}{2} pl - \frac{4pl}{\pi^2} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh \frac{n\pi}{2}} = 0,5 pl - 0,16 pl = 0,34 pl.$$

Nedbøjningsfladens (u -Fladens) Tangenthældning $t_{x,1}$ i Midtpunktet af Siden b ($= l$) faas paa lignende Maade.

Belastningsfladen er i dette Tilfælde $\frac{U}{D}$ -Fladen.

Først beregnes $\frac{U}{D}$ -Fladens Tryk i det betragtede Punkt. For at vise, at man selv med et groft Skøn om U -Fladens Form faar tilfredsstillende Resultater, antages Snit i U -Fladen langs Pladens to Sæt Tiendedelslinier (parallelle med de to Kantretninger) at have Form af 2' Grads Parabler, hvis indbyrdes Højder alle kan bestemmes ved Ordinaten U i Pladens Midtpunkt. Trykket i det betragtede Punkt bliver da efter Reglen ovenfor:

$$\frac{1}{2} \cdot 0,1 l \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{U}{D} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \right)$$

$$= \frac{1}{30} \frac{U}{D} l^2 \cdot \frac{1}{125} \cdot 525 = 0,14 \frac{U}{D} l^2.$$

Dernæst skønnes Arealet A'_y af u -Fladens Snit langs Skillelinien, idet A'_y med tilstrækkelig Nøjagtighed kan antages at have samme Form som Momentfladen for en simpelt understøttet Bjælke, der har samme Længde som Skillelinien og er belastet med en parabolisk Belastningsflade (Snit i U -Fladen) med Pilhøjde U . Udtrykt ved den søgte Tangenthældning $t_{x,1}$, bliver Arealet da:

$$A'_y = t_{x,1} \int_0^l \xi' \left(1 - 2 \left(\frac{\xi'}{l} \right)^2 + \left(\frac{\xi'}{l} \right)^3 \right) d\xi' = \frac{1}{5} t_{x,1} l^2$$

$$\xi'_y = \frac{1}{2} l.$$

Af Ligning (14) faas nu:

$$t_{x,1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) l = 0,14 \frac{U}{D} l^2 - \frac{1}{5} t_{x,1} l^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} l} + \frac{1}{\frac{1}{2} l} \right)$$

$$t_{x,1} \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{10} \right) l = 0,14 \frac{U}{D} l^2$$

$$t_{x,1} = 0,1714 \frac{U}{D} l.$$

Idet $U = 0,075 pl^2$, bliver endelig

$$t_{x,1} = 0,01285 \frac{pl^3}{D}$$

b) Plader paavirkede af Randmomenter.

For simpelt understøttede Plader med Randmomenter langs een Rand bliver Skalar-Momentfladens Hovedform som antydnet i Fig. 4, hvilket indses ved Betragtning af Strækfladen, som fremkommer ved Belastning paa en Linie langs den betragtede Kant med et Belastningsprofil, der varierer som Randmomentet. Som tidligere nævnt er Randmomenterne langs en retliniet Understøtning lig Skalar-Momenterne, da Pladens Deformation i den nærmeste Omegn af en saadan Understøtning er cylindrisk.

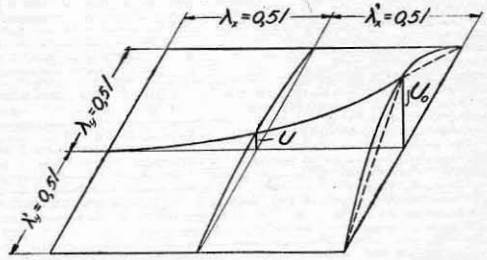


Fig. 4.

Da Skalar-Momenterne altid er Nul i Pladens Hjørner, kan deres Variation langs Randen skønsvist antages at foregaa efter en Parabel med Ordinator Nul ved Randens Endepunkter.

Som Eksempel skal ved Formel (14) bestemmes Nedbøjningsfladens Tangenthældninger i Midtpunkterne af Kanterne for en kvadratisk Plade (Sidelinier $a = b = l$), paavirket langs højre Kant af Randmomenter varierende efter en 2' Grads Parabel med Pilhøjde U_0 , saaledes som vist i Fig. 4.

Bestemmelsen af Skalarmomentfladens Ordinator, Punkt for Punkt af Pladen, kan ske efter Formel (8). Denne Bestemmelse udelades dog her for at vise, at man selv ved et groft Skøn om U -Fladens Variation kan faa tilfredsstillende Resultater for de søgte Tangenthældninger i Nedbøjningsfladen (u -Fladen).

Det antages skønsvist, at Snit i U -Fladen langs Pladens to Sæt Tiendedelslinier (parallelle med de to Kantretninger) har Form af 2' Grads Parabler af to forskellige Typer, som vist i Fig. 4 for de to paa hinanden vinkelrette Snit gennem Pladens Midtpunkt. De tilsvarende $\frac{U}{D}$ -Arealer kan da alle udtrykkes ved U_0 .

1. Tangenthældningen $t_{x,1}$ i Midtpunktet af venstre Kant.

Først beregnes $\frac{U}{D}$ -Fladens Tryk i det betragtede Punkt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \cdot 0,1 l \cdot \frac{1}{3} \frac{U_0}{D} \cdot l \left(\frac{25}{25} \cdot \frac{5}{5} \cdot 1 + \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{21}{25} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{16}{25} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \right) \\ & = \frac{1}{1 \frac{1}{2}} \frac{U_0}{D} l^2 \cdot \frac{5 \cdot 25}{1 \frac{1}{2}} = 0,035 \frac{U_0}{D} l^2. \end{aligned}$$

Dernæst skønnes Arealet A'_y af u -Fladens Snit langs Skillelinien, idet A'_y antages at have Form som Momentfladen i en simpelt understøttet Bjælke af Længde som Skillelinien og belastet med dennes paraboliske U -Flade. Udtrykt ved den søgte Tangenthældning bliver da:

$$A'_y = \frac{3}{10} t_{x,1} l^2$$

og $\xi'_y = \frac{4}{9} l$.

Ligning (14) giver nu:

$$t_{x,1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) l = 0,035 \frac{U_0}{D} l^2 - \frac{3}{10} t_{x,1} l^2 \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}l} + \frac{1}{\frac{1}{2}l} \right)$$

$$t_{x,1} \left(\frac{5}{12} + \frac{8}{15} \right) l = 0,035 \frac{U_0}{D} l^2$$

$$t_{x,1} = \frac{60}{57} 0,035 \frac{U_0}{D} l = 0,037 \frac{U_0}{D} l$$

2. Tangenthældningen $t_{x,2}$ i Midtpunktet af højre Kant.

$\frac{U}{D}$ -Fladens Tryk i det betragtede Punkt:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot 0,1 \cdot \frac{1}{3} \frac{U_0}{D} l \left(\frac{25}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot 1 + \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{21}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{16}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \right) \\ = \frac{1}{40} \frac{U_0}{D} l^2 \frac{5 \cdot 25}{125} = 0,105 \frac{U_0}{D} l^2 \end{aligned}$$

For A'_y og ξ'_y faas:

$$A'_y = \frac{1}{10} t_{x,2} l^2 \quad \text{og} \quad \xi'_y = \frac{5}{9} l,$$

hvorefter Ligning (14) giver:

$$t_{x,2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) l = 0,105 \frac{U_0}{D} l^2 - \frac{1}{10} t_{x,2} l^2 \cdot \frac{5}{9} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}l} + \frac{1}{\frac{1}{2}l} \right)$$

$$t_{x,2} \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{9} \right) l = 0,105 \frac{U_0}{D} l^2$$

$$t_{x,2} = \frac{36}{33} 0,105 \frac{U_0}{D} l = 0,164 \frac{U_0}{D} l \quad (\text{numerisk Værdi}).$$

3. Tangenthældningen $t_{x,3}$ i Midtpunktet af øvre Kant.

$\frac{U}{D}$ -Fladens Tryk i det betragtede Punkt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 0,1 l \cdot \frac{2}{3} \frac{U_0}{D} l \left(\frac{81}{100} \cdot \frac{1}{5} + \frac{64}{100} \cdot \frac{2}{5} + \frac{49}{100} \cdot \frac{3}{5} + \frac{36}{100} \cdot \frac{4}{5} + \frac{25}{100} \cdot \frac{5}{5} + \frac{16}{100} \cdot \frac{4}{5} + \frac{9}{100} \cdot \frac{3}{5} \right. \\ \left. + \frac{4}{100} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{30} \frac{U_0}{D} l^2 \frac{625}{500} = \frac{1}{24} \frac{U_0}{D} l^2 \end{aligned}$$

For A'_y og ξ'_y sættes som under a)

$$A'_y = \frac{1}{5} t_{x,3} l^2 \quad \text{og} \quad \xi'_y = \frac{1}{2} l,$$

hvorefter faas af Ligning (14):

$$t_{x,3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) l = \frac{1}{24} \frac{U_0}{D} l^2 - \frac{1}{5} t_{x,3} l^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} l + \frac{1}{2} l \right)$$

$$t_{x,3} = \frac{1,20}{9,8} \cdot \frac{1}{24} \frac{U_0}{D} l = 0,051 \frac{U_0}{D} l.$$

Indspændte Plader.

Ved Hjælp af Nedbøjningsfladens (u -Fladens) Tangenthældninger v Understøtningerne for simpelt understøttede Plader, paavirkede dels forskellige Randmomenter dels af forskellige lodrette Belastninger, kan Indspændingsmomenter for indspændte Plader og Understøtningsmoment for kontinuerlige Plader beregnes.

Eksempelvis faas for en kvadratisk Plade (Sidelinie l) med ensform fordelt Belastning:

a) Ved Indspænding langs een Kant.

$$0,1714 \frac{U}{D} l + 0,164 \frac{U_0}{D} l = 0$$

$$U_0 = - \frac{0,1714}{0,164} U = - 1,04 U,$$

hvor U er Skalar-Momentet i Midtpunktet af den simpelt understøttet Plade med ensformig fordelt Belastning. Dette Moment er tidligere beregnet til

$$U = 0,075 p l^2.$$

Man faar da

$$U_0 = - 1,04 \cdot 0,075 p l^2 = - 0,078 p l^2 = - \frac{1}{12,8} p l^2.$$

Ved nøjagtig Beregning faas $- 0,084 p l^2$.

b) Ved Indspænding langs to modstaaende Kanter.

$$0,1714 \frac{U}{D} l + 0,164 \frac{U_0}{D} l + 0,037 \frac{U_0}{D} l = 0$$

$$U_0 = - \frac{0,1714}{0,164 + 0,037} U = - 0,85 U$$

eller med $U = 0,075 p l^2$

$$U_0 = - 0,85 \cdot 0,075 p l^2 = - 0,064 p l^2 = - \frac{1}{15,6} p l^2.$$

Samme Værdi for de to modstaaende Kanter.

¹⁾ Se Bygningsstatistiske Meddelelser 1929, Side 62.

c) Ved Indspænding langs alle fire Kanter.

$$0,1714 \frac{U}{D} l + 0,164 \frac{U_0}{D} l + 0,037 \frac{U_0}{D} l + 0,051 \frac{U_0}{D} l + 0,051 \frac{U_0}{D} l = 0$$

$$U_0 = - \frac{0,1714}{0,164 + 0,037 + 0,051 + 0,051} U = - \frac{0,1714}{0,303} U = - 0,566 U$$

eller med $U = 0,075 pl^2$

$$U_0 = - 0,566 \cdot 0,075 pl^2 = - 0,04245 pl^2 = - \frac{1}{23,5} pl^2.$$

Samme Værdi for alle fire Kanter.

d) Ved Indspænding langs tre Kanter.

De bestemmende Indspændingsmomenter ved Kanternes Midtpunkter er her forskellige. Kaldes disse U_1 , U_2 og U_3 , bliver $U_1 = U_2$, naar 1 og 2 er modstaaende Kanter. Der faas:

$$0,1714 \frac{U}{D} l + 0,164 \frac{U_1}{D} l + 0,037 \frac{U_2}{D} l + 0,051 \frac{U_3}{D} l = 0$$

$$\text{og} \quad 0,1714 \frac{U}{D} l + 0,051 \frac{U_1}{D} l + 0,051 \frac{U_2}{D} l + 0,164 \frac{U_3}{D} l = 0.$$

Idet $U_1 = U_2$, bliver $U_3 = 0,876 U_1$, hvorefter findes:

$$U_1 = U_2 = - 0,0525 pl^2 = - \frac{1}{19} pl^2$$

$$U_3 = - 0,0461 pl^2 = - \frac{1}{21,7} pl^2.$$

e) Ved Indspænding langs to sammenstødende Kanter.

$$0,1714 \frac{U}{D} l + 0,164 \frac{U_0}{D} l + 0,051 \frac{U_0}{D} l = 0$$

$$U_0 = - \frac{0,1714}{0,164 + 0,051} U = - 0,8U$$

eller med $U = 0,075 pl^2$

$$U_0 = - 0,060 pl^2 = - \frac{1}{16,6} pl^2.$$

Samme Værdi for de to sammenstødende Kanter.

